

22-11-16

$A = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}_1 \mid f: \text{συνάρτηση}\}$: σύνολο αριθμητικών
συναρτήσεων $\forall f, g \in A: f * g \in A$

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

$\varepsilon \in A$, όπου $\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \text{ και τότε: } f * \varepsilon = f = \varepsilon * f, \forall f \in A \\ 0, & n > 1 \end{cases}$

Αν $f \in A$, υπάρχει $g \in A: f * g = \varepsilon = g * f$;

Απάντηση: Ναι, αν $f(1) \neq 0$ και αντίστροφα

Αν $f(1) \neq 0$, τότε η μοναδική συνάρτηση $g \in A$:

$f * g = g * f = \varepsilon$ καλείται εναλλακτικά αντίστροφη της f
και συμβολίζεται με f^{-1}

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)}, & \text{αν } n=1 \\ -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) \end{cases}$$

$U = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(1) \neq 0\}$: σύνολο όλων των εναλλακτικά
αντιστρέψιμων συναρτήσεων

↳ Παρατήρηση: Αν $f, g \in U$. Τότε $f^{-1} \in U$ και $f * g \in U$

• $f \in U \Rightarrow f(1) \neq 0 \Rightarrow f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)} \neq 0 \Rightarrow f^{-1} \in U$

$(f * g)(1) = f(1)g(1) \neq 0$, διότι επειδή $f, g \in \mathcal{U}$, έπεται ότι

$f(1), g(1) \neq 0$. Άρα $f * g \in \mathcal{U}$

$(\mathcal{U}, *)$ = αβελιανή ομάδα, $\mathcal{U} \subseteq A$

$\mathcal{U} = \{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(1) \neq 0 \}$ = σύνολο ελκτικώς αντιστρέψιμων συναρτήσεων

Ορισμός: Αν $f \in A$ τότε η f καλείται πολλαπλασιαστική συνάρτηση $\Leftrightarrow f \neq 0$ και αν $m, n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $(m, n) = 1$, τότε: $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ *

$\mathcal{M} = \{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid f: \text{πολλαπλασιαστική} \}$ = σύνολο πολλαπλασιαστικών συναρτήσεων

Αν $f \in \mathcal{M} \Rightarrow f \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: f(n) \neq 0$. Τότε:

$$0 \neq f(n) = f(n \cdot 1) \stackrel{*}{=} f(n)f(1) \Rightarrow f(1) = 1$$

Άρα $f \in \mathcal{U}$ και $f(1) = 1$

↳ Παράδειγμα: 1) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$N^k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \quad N^k(n) = n^k$$

Τότε $N^k \in \mathcal{M}$. Πράγματι: $N^k(1) = 1 \neq 0 \Rightarrow N^k \neq 0$ και

αν $n, m \in \mathbb{N}: (n, m) = 1$, τότε:

$$N^k(n \cdot m) = (n \cdot m)^k = n^k m^k = N^k(n) \cdot N^k(m)$$

2) $z: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $z(n) = \sum_{d|n} 1$: αριθμός θετικών διαιρετών του n

Προφανώς $z(1) = 1 \neq 0$

Έστω $n > 1$ και έστω $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$: πρωτογενής
ανάλυση του n

Οπώς: $d|n \Leftrightarrow d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, όπου: $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, $1 \leq i \leq k$

Δυνατές τιμές για το $\beta_1: \alpha_1 + 1$
-||----- $\beta_2: \alpha_2 + 1$ } \rightarrow
-||----- $\beta_k: \alpha_k + 1$

\Rightarrow Δυνατές τιμές για το θετικό διαιρέτη d του n
είναι:

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$$

Αρα: $J(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$

Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και $(n, m) = 1$. Θα δείξουμε ότι

$$z(n \cdot m) = z(n)z(m)$$

\hookrightarrow Αν $\underline{n=1}$, τότε $z(n \cdot m) = z(1 \cdot m) = z(m) = 1 \cdot z(m) = z(1)z(m) =$
 $= z(n)z(m)$

\hookrightarrow Αν $\underline{m=1}$, ομοίως $z(n \cdot m) = z(n) \cdot z(m)$

Αν $n, m \geq 1$, τότε: $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$: πρωτογενής διάλυση του n
 $m = q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l}$: πρωτογενής διάλυση του m
 $(p_i \neq q_j)$: πρώτοι, δότι $(n, m) = 1$

Τότε: η πρωτογενής διάλυση του $nm = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l}$
 $\tau(nm) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1) \cdot (\beta_1 + 1) \dots (\beta_l + 1) = \tau(n) \tau(m)$. Άρα, $\tau \in M$

Πχ: $\tau(2 \cdot 4) = \tau(8) = 4 \neq \tau(2) \cdot \tau(4) = 2 \cdot 3 = 6$
 $\Rightarrow \tau$: όχι πλήρως πολλαπλασιαστικός

Πρόταση: $f \in M$

$$f(n) = \begin{cases} 1 & , n=1 \\ 0 & , \exists p: \text{πρώτος} : p^2 | n \\ (-1)^h & , n = p_1 p_2 \dots p_k : \text{πρωτ. διάλυση} \end{cases}$$

Απόδειξη: $f(1) = 1 \neq 0 \Rightarrow f \neq 0$

Έστω $n, m \in \mathbb{N} : (n, m) = 1$

α) Αν $n=1, m \in \mathbb{N}$, τότε: $f(n \cdot m) = f(1 \cdot m) = f(m) = 1 \cdot f(m) = f(1) f(m) = f(n) f(m)$

β) Ομοίως, αν $m=1, n \in \mathbb{N}$, τότε: $f(n \cdot m) = f(n) f(m)$

γ) Έστω $n \geq 1, m \geq 1$ και έστω $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$: πρωτ. διάλυση

1) Αν $\exists p$: πρώτος, $p^2 | n$, τότε: $f(n) = 0 \Rightarrow f(n) f(m) = 0$

Όπως προφανώς $p^2 | n \cdot m \Rightarrow f(n \cdot m) = 0 \Rightarrow f(n \cdot m) = f(n) f(m)$

2) Αν υπάρχει πρώτος $p: p^2 | m$, τότε obviously: $f(m) = f(n)f(m)$

3) Αν \nexists πρώτος $p: p^2 | n$ και $p^2 | m$, τότε:

$f(n) = (-1)^k$ / Αν υπάρχει πρώτος $p: p^2 | n-m$, τότε
 $f(m) = (-1)^a$ / $p^2 | n$ ή $p^2 | m$: Άτονο από υπόθεση

Αρα \nexists πρώτος $p: p^2 | n \cdot m \Rightarrow f(nm) = (-1)^{k+a}$. Αρα $f(nm) = (-1)^{k+a} = (-1)^k (-1)^a = f(n)f(m)$

↳ Πρόταση: Έστω $f \in M$ και a_1, a_2, \dots, a_k πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο, τότε: $f(a_1 a_2 \dots a_k) = f(a_1) f(a_2) \dots f(a_k)$ \otimes

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας (Α.ΜΕ). Για $k=2$, η \otimes ισχύει αν τον ορίσει ναί/κίς συνάρτησης. Υποθέτουμε ότι η \otimes ισχύει

Έστω $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$: πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο: $(a_i, a_j) = 1$
 $1 \leq i, j \leq k+1$

$f(a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1}) = f[(a_1 a_2 \dots a_k) a_{k+1}] \stackrel{(\dagger)}{=} f(a_1 \dots a_k) f(a_{k+1}) = f(a_1) f(a_2) \dots f(a_k) f(a_{k+1})$

(†) Αν $(a_1 a_2 \dots a_k, a_{k+1}) = d > 1$, τότε \exists πρώτος $p: p | d$

$\Rightarrow p | a_{k+1}, p | a_1 \dots a_k \Rightarrow \begin{cases} p | a_{k+1} \\ \exists i=1, \dots, k: p | a_i \end{cases} \Rightarrow p | (a_{k+1}, a_i) = 1$

Άτονο, άρα $(a_1 \dots a_k, a_{k+1}) = 1$

↳ Θεώρημα: Αν $n > 1$ με πρωτ. ανάλυση $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$

Τότε $\forall f \in M: f(n) = f(p_1^{a_1}) f(p_2^{a_2}) \dots f(p_k^{a_k})$

Απόδειξη: Επειδή $(p_i^{a_i}, p_j^{a_j}) = 1$, $1 \leq i \neq j \leq k$, το αποτέλεσμα προκύπτει απ' την πρόταση

Πρόταση: Αν $f, g \in M$, τότε $f = g \iff \forall p$ πρώτο, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$

$$f(p^\alpha) = g(p^\alpha)$$

Απόδειξη: $\forall n > 1$ με πρωτογενή ανάλυση $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$
τότε: $f(n) = f(p_1^{a_1}) \dots f(p_k^{a_k}) \iff$

\iff Αν $f = g$, τότε προφανώς $f(p^\alpha) = g(p^\alpha)$

$g(n) = g(p_1^{a_1}) \dots g(p_k^{a_k}) \iff$ Αντίστροφα

Αν $f(p^\alpha) = g(p^\alpha)$, \forall πρώτο p , $\forall \alpha \in \mathbb{N}$

$$f(n) = f(p_1^{a_1}) \dots f(p_k^{a_k}) = g(p_1^{a_1}) \dots g(p_k^{a_k}) = g(n)$$

Τότε: $f(p_i^{a_i}) = g(p_i^{a_i})$, $1 \leq i \leq k \implies$

• Αν $n=1$: $f(1) = 1 = g(1)$, ουδενώς

$$f(n) = g(n), \forall n \in \mathbb{N} \implies f = g$$

$$\left\{ \text{Άσκηση : } \sigma \in M \quad \left| \quad \sigma(n) = \sum_{d|n} d \right. \right\}$$